PENENTUAN DISTRIBUSI STATIONER JARINGAN SIKLIK JACKSON DENGAN METODE REDUKSI RANK

Novita Dwi Maharani Sabban*)

Abstract : *This study aims to test the model a Cyclic Networks Jackson as a form of Markov and determine vectors opportunities stationary queuing models with reduction method Rank. This study uses the method of literature; which examines several theories relating to the determination of stationary distribution network with cyclical Jackson Rank Reduction method. The least squares method is used for the linear regression model parameter estimation, besides using also methods Bootstrap resampling method Nonparameter as data errors randomly and independently with replacement. The results showed that (1) Network cyclic Jackson with 2 station and 3 station can be modeled in the form of Markov. (2) Distribution network stationary cyclic two stations depends on the value of the transition from station 1 to station 2 and the value of the transition from station 2 to station 1, (3) rank reduction method can be used to determine the stationary distribution of the network cyclic Jackson. This method reduces the rank matrix Q builders are generally greater than one, to then generate a matrix with a rank equal to one.*

Key words: *Modeling, network cyclic Jacson, rank reduction method, stationary distribution.*

PENDAHULUAN

Dalam menjalani aktivitas sehari-hari dalam kehidupan, kita sering dihadapkan pada persoalan antrian. Antrian merupakan barisan orang atau pekerjaan yang menunggu untuk dilayani atau dilakukan. Pelanggan bisa berupa orang dalam distribusi makanan, mobil yang masuk parkiran, penelpon yang menunggu untuk disambungkan dalam jaringan telepon, ataupun paket data dalam jaringan server komputer. Secara matematika, antrian merupakan proses acak (random). State proses adalah jumlah pelanggan yang menunggu untuk dilayani biasa disebut panjang antrian. Kedatangan akan menambah panjang antrian dan pelayanan mengurangi panjang antrian. Antrian biasanya dispesifikasikan dengan : (1) distribusi peluang yang mengatur kedatangan (dengan kata lain seberapa sering kedatangan pelanggan), (2) distribusi peluang yang mengatur pelayanan (lamanya layanan yang diberikan), (3) kedisiplilanan antrian, dengan kata lain bangaimana layanan dibangun (seperti jumlah pelayan, prioritas memilih pelanggan untuk dilayani pertama kali). Antrian akan memiliki kapasitas yang terbatas atau kapasitas yang tidak terbatas. (Katinka Wolter, 2004)

Untuk permasalahan markov, ada tiga langkah untuk menganalisis sebuah sistem modelnya :

1) Merepresentasikan menjadi sebuah model markov dan membawanya ke dalam rantai markov.
2) Menentukan vektor distribusi stationer π.
3) Akan ditentukan kinerja dari system, melalui nilai π,. (Bin Peng, 2004)

Bin Peng (2004) dalam thesisnya memperkenalkan sebuah metode baru yaitu metode reduksi rank untuk menentukan distribusi stationer rantai markov. Dalam tulisannya tersebut Bing Peng melihat bahwa kebanyakan matriks Markov mempunyai rank yang lebih besar dari 1, maka ia menggunakan rumusan reduksi rank-1 Wedderburn yang pada prinsipnya mengurangi rank dari matriks. Kemudian ia mendisain suatu algoritma pengurangan rank dengan mengiterasi matriks awal yang mempunyai rank yang lebih besar dari satu dan memodifikasinya di dalam langkah-langkah berurutan, sampai iterasi matriks memiliki rank sama dengan satu.

Richard Serfozo (2005) mendefinisikan Jaringan Jackson sebagai sebuah antrian berpasangan (Jaringan) yang nilai layanan pada masing-masing node bergantung hanya pada banyaknya unit pada node tersebut. Menurut sifatnya, jaringan Jackson dibagi dua jenis yaitu jaringan terbuka dan jaringan tertutup. Dalam jaringan tertutup terdapat jaringan siklik yang menarik untuk diteliti, yaitu bagaimana merepresentasikan sistem yang ada dan kemudian menganalisisnya sebagai sebuah proses Markov. Dari uraian tersebut, maka akan diteliti bagaimana penggunaan metode reduksi rank dalam menentukan distribusi stationer dalam sebuah antrian, dengan judul ”Penentuan Distribusi Stationer Jaringan Siklik Jackson Dengan Metode Reduksi Rank”.

Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana bentuk/pola jaringan siklik Jackson direpresentasikan ke dalam bentuk markov dan bagaimana menentukan distribusi stasioner dengan menggunakan Metode Reduksi Rank.

Batasan Masalah

Jaringan siklik yang akan diteliti pada penelitian ini hanya pada dua server dan tiga server.

Tujuan Penelitian

a. Memodelkan suatu Jaringan Siklik Jackson sebagai suatu bentuk Markov
b. Menentukan vektor peluang stationer model antrian dengan metode Reduksi Rank.

Manfaat Penelitian

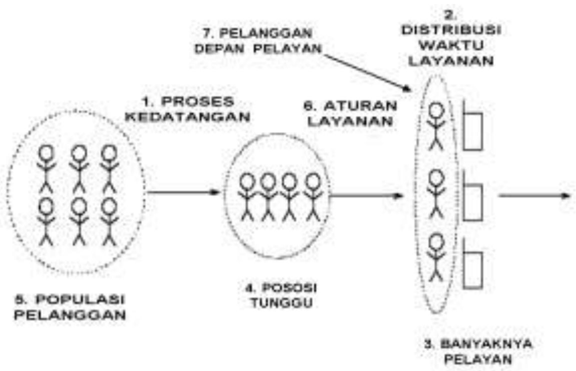
Hasil peneilian ini akan menjadi landasar dalam membangun dan mengiplementasikan suatu bentuk Markov dan menentukan vektor peluang stationer model antrian dengan metode reduksi Rank.

TINJAUAN PUSTAKA

Antrian

Berbelanja di toko atau kantor pos memerlukan antrian untuk mendapatkan jasa/ layanan. Dalam sistem komputer antrian hadir di banyak tempat; misalnya proses administrasi dari suatu sistem operasi, pada penggunaan bersama seperti mesin pencetak (printer) atau dalam paket sistem transmisi yang digunakan protokol komunikasi. Oleh karena itu, teori antrian telah menjadi suatu alat yang sangat penting untuk menganalisa sistem komputer. Dasar dari teori antrian ditemukan pada tahun 1960-an dan 1970-an namun masih tetap diteliti dan secara luas diaplikasikan hingga sekarang. (Norman Matloff, 2006)

Dalam konteks sistem antrian, pelanggan atau pekerjaan mempunyai maksud/arti yang sama. Unsur-Unsur suatu antrian sistem seperti yang ditunjukkan dalam gambar 1.



Gambar 1. Unsur -unsur dalam sistem antrian

Dari gambar 1 diatas dapat dilihat unsur-unsur yang membangun sistem antrian. Unsur-unsur antrian tersebut dibagi atas :

1. Proses kedatangan. Misalkankan pelanggan datang saat t_1, t_2,..., t_n, maka $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ adalah waktu antar kedatangan. Kita mengasumsikan τ_j sebagai barisan peubah acak bebas dan berdistribusi identik.
2. Distribusi waktu pelayanan. Waktu yang digunakan oleh masing-

masing pelanggan untuk dilayani disebut waktu pelayanan.

3. Banyaknya pelayan. Bila dalam antrian, kita temukan beberapa pelayanan yang menawarkan layanan yang sama, yang disebut pelayan. Jika pelayan menawarkan layanan yang berbeda maka akan dikelompokkan menurut layanan yang ditawarkan dan masing-masing mempunyai sistem antrian tersendiri.
4. Kapasitas. Jika kapasitas dari antrian adalah terbatas hanya dalam jumlah terbatas maka pelanggan akan berada dalam ruang tunggu.
5. Ukuran populasi. Banyaknya pelanggan yang datang disebut ukuran populasi. Ukuran populasi adalah terbatas.
6. Aturan Layanan. Bagaimana pengaturan pelanggan dilayani disebut aturan layananan. Yang paling umum adalah *First Come, First Served* (pertama datang, dilayani pertama; FCFS). Contoh disiplin lain adalah *Last Come, First Served* (terakhir datang, pertama dilayani; LCFS). (Katinka Wolter, 2004)

Untuk pendefinisian sistem antrian, terdapat enam parameter yang digunakan. notasi yang digunakan adalah notasi Kendall, dimana enam parameter tersebut dapat dituliskan dengan :

A/S/m/B/K/SD

dimana A merupakan proses kedatangan, S proses pelayanan, m jumlah pelayan, B kapasitas, K populasi dan D aturan layanan. Untuk distribusi pelayanan dan kedatangan biasanya dituliskan dengan huruf kapital pertama seperti pada daftar berikut :

M untuk markovian; peubah acak bebas dan ekponensial

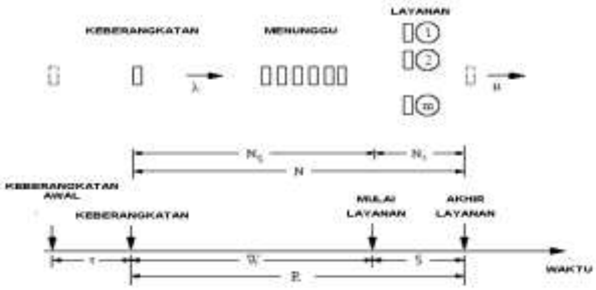
Ek untuk distribusi Erlang dengan parameter k

Hk untuk distribusi hiper-eksponensial dengan parameter k

D untuk deterministik

G untuk yang umum (tidak ada spesifikasi)

Selanjutnya, akan diperkenalkan parameter dan peubah acak yang digunakan dalam analisis sistem antrian. Dalam Gambar 2 dibawah ini dapat dilihat peubah yang digunakan dalam sistem antrian. Kecuali λ dan μ, semua peubah merupakan peubah acak.



Pengertian dari notasi pada Gambar 2 adalah sebagai berikut :

τ : Waktu antar kedatangan

λ : Nilai rataan kedatangan

S : Waktu layanan tiap pelanggan

μ : Nilai rataan layanan untuk satu pelayan, $\mu = 1/E(S)$. Untuk m pelayan, total nilai layanan adalah $m\mu$

N : Jumlah pelanggan dalam sistem. Disebut juga panjang antrian. Termasuk pelanggan yang menunggu ataupun pelanggan yang sedang dilayani

N_q : Jumlah pelanggan yang sedang menunggu

N_s : Jumlah pelanggan yang sedang dilayani

R : Waktu respon atau waktu yang digunakan oleh sistem antrian

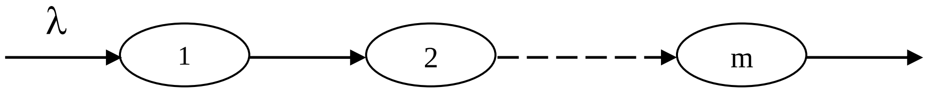
W : Waktu tunggu, waktu antara kedatangan pelanggan sampai dimulainya layanan

Rata-Rata jumlah pelanggan dalam sistem sama dengan rata-rata waktu yang digunakan dalam sistem dikalikan dengan nilai kedatangan pelanggan pada sistem. Namun, pada sistem antrian tidak stabil, sulit untuk digunakan, karena banyaknya pelanggan dalam sistem adalah tak terbatas dan waktu yang digunakan pelanggan dalam sistem juga meningkat melewati batas. (Katinka Wolter, 2004)

Jaringan Antrian Berpasangan

Sebelum membahas antrian berpasangan akan ditinjau dahulu antrian M/M/1. Antrian jenis ini merupakan, antrian dengan proses markov dengan satu pelayan. Kemudian, tinjau waktu berangkat pekerjaan, dengan kata lain waktu dimana pelayanan pekerjaan telah selesai. Dan kebalikan dari hal ini adalah waktu kedatangan pekerjaan. Kedua hal diatas merupakan hal yang saling berkebalikan, yang berarti distribusi waktu kedatangan sama dengan waktu keberangkatan.
Dengan kata lain,

Pernyataan 1 : Keberangkatan dari sistem berjalan dengan proses poisson dengan nilai λ.
Misalkan state awal X(0) berdistribusi mengikuti peluang steady-state π. Dengan sifat memoryless kedatangan poisson, distribusi state pada saat kedatangan adalah sama dengan distribusi state pada saat waktu tak acak *t*. Maka kebalikannya,
Pernyataan 2 : Distribusi state pada saat keberangkatan sama dengan pada saat waktu tak acak.
Dan terakhir, perlu dicatat bahwa, bila diberikan X(*t*), state $\{X(s), s \le t\}$ pada antrian sebelum waktu *t* independen statistik pada saat setelah proses keberangkatan di *t*. Kebalikannya memberikan,
Pernyataan 3 : Diberikan *t*, proses kedatangan antrian pada state $\{X(s), s \le t\}$ sebelum waktu *t* independen dengan setelah waktu *t*.



Gambar 3. Representasi dari sistem antrian berpasangan

Gambar 3 diatas merupakan penggambaran dari sistem antrian berpasangan, yang merupakan rangkaian dari beberapa antrian. Dari pembahasan antrian M/M/1 diatas, selanjutnya akan diaplikasikan pada antrian berpasangan. Akan ditunjukkan pada dua buah antrian. Yang pertama, $X_1(t)$ merupakan keluaran dari $X_2(t)$, yang merupakan input. Ditunjukkan bahwa masukan ke dalam $X_1(t)$ adalah proses poisson dengan nilai λ. Dan waktu layanan antara kedua antrian berdistribusi eksponensial dengan nilai μ_1 dan μ_2.
$X_1(t)$ merupakan antrian M/M/1, jadi peluang steady-state untuk $X_1(t)$ adalah seperti persamaan dibawah dengan nilai $u = \lambda / \mu_1$

$$\pi_i = \mu^i (1-u),\ i \ge 0$$

Pernyataan pertama, diketahui bahwa masukan ke dalam $X_2(t)$ juga merupakan proses poisson. Maka, $X_2(t)$ juga merupakan antrian M/M/1 , dengan steady-state sama seperti persamaan diatas dengan nilai $u = \lambda / \mu_2$.
Pernyataan ketiga, dapat diartikan bahwa masukan ke $X_2(t)$ pada saat *t* independen dengan $\{X(s), s \le t\}$. Dengan fakta ini, maka dapat diasumsikan bahwa $X_1(0)$ mempunyai distribusi steady-state, dan akan diketahui bahwa

$$P[X_1(t) = i, X_2(t) = j] = (1-u_1)u_1^i P[X_2(t) = j]$$

Sekarang, misalkan $t \rightarrow \infty$, akan diketahui bahwa peluang untuk waktu yang lama vektor $[X_1(t), X_2(t)]$ menjadi sama ke (*i*,*j*) adalah

$$(1-u_1)u_1^i (1-u_2)u_2^i$$

Dengan kata lain, distribusi steady-state untuk vektor yang mempunyai dua komponen menjadi peubah bebas. (Norman Matloff, 2006)

Jaringan Jackson

Pada tahun 1963, diperkenalkan suatu bentuk jaringan antrian terbuka exponensial oleh J. R. Jackson, dalam tulisannya berjudul "Jobshop-Like Queueing Systems" pada Management Science, Vol.10. Ia memperkenalkan beberapa asumsi atas karakteristik model dan bentuk sederhana distribusi stasioner state dan beberapa hal yang mengindikasikannya. Model ini kemudian diperluas untuk masalah yang lebih menarik dengan sistem yang lebih kompleks, yaitu menyangkut jenis pelanggan yang berbeda, berbagai aturan antrian, dan sebagainya. Model ini kemudian diberi nama jaringan antrian Jackson untuk menghormati peneliti pelopor yang pertama mempelajari perilaku jaringan antrian ini. (Francois Baccelli)

Jaringan Jackson didefinisakan sebagai jaringan antrian dengan K stasiun dimana setiap stasiun terdapat pelayan tunggal dengan kapasitas tak terbatas. Pelanggan akan bergerak dari stasiun satu ke stasiun selanjutnya untuk menerima layanan. Notasi yang digunakan adalah

$$\{\sigma^i(n), n \in N\},$$
$$\{v^i(n), n \in N\}, \quad i \in \{1,...,K\}$$

Dimana $\sigma^i(n) \in R^+$ dan $v^i(n) \in \{1,...,K,K+1\}$, $K+1$ melambangkan keluar.

Waktu layanan $\sigma^i(n)$ adalah waktu yang digunakan oleh pelanggan ke *n* di stasiun *i;* setelah layanan selesai, pelanggan akan menuju ke stasiun $v^i(n)$, dimana $v^i(n)$ merupakan jalur pada stasiun *i*. (Francois Baccelli)

Dari definisi diatas, akan didapatkan dua jenis dari jaringan Jackson yaitu jaringan terbuka dan jaringan tetutup.

a. Jaringan terbuka. Pada jaringan ini terdapat titik dimana terdapat proses kedatangan dari luar $\{T_n, n \in N\}$, dengan $0 \le T_0 \le T_1 \le \ldots$. Oleh karenanya ditambahkan satu stasiun (disimbolkan 0) dimana akan dipakai untuk kedatangan pelanggan pertama pada saat $\sigma^i(n) = T_0$, dan selanjutnya waktu antar kedatangan pelanggan adalah $\sigma^i(n) = T_n - T_{n-1}, n > 0$.

   Kedatangan dari luar ke-n akan masuk ke stasiun $v^0(n) \in \{1,...,K\}$. Dan begitu seterusnya sampai pada saat pelanggan meningggalkan jaringan.

b. Jaringan tertutup. Pada jaringan ini tidak terdapat kedatangan dari luar. Dan tidak ada pula jalan untuk keluar dengan kata lain $\{v^i(n), n \in N\}, \ \forall i \in \{1,...,K\}, \ \forall n \in N$. Oleh karena itu, jumlah total banyaknya pelanggan akan konstan. (Francois Baccelli)

Jaringan siklik Jackson merupakan sub bagian dari jaringan tertutup yang dibagi menurut graf tertutup dari jaringan. Jaringan siklik Jackson didefinisikan sebagai jaringan tetutup, dimana untuk semua *n* dan *i*, $v^i(n) = i + 1$. Dari penomoran stasiun dapat diketahui modulo [*K*], sebagai contoh stasiun (K+2) adalah stasiun 2. Waktu siklik pelanggan adalah waktu antara dua kedatangan berurutan pada stasiun yang sama. Dalam jaringan ini hanya terdapat pelayan tunggal pada tiap stasiun i (i = 1, …, K) dan aturan layanan untuk setiap stasiun adalah FCFS. Kapasitas antara dua stasiun berurutan adalah tak terbatas. (Francois Baccelli).

Distibusi stasioner

Solusi steady-state rantai markov di peroleh dengan mengambil batas limit dari solusi sementara (transient) sebagai waktu yang menuju tak hingga. Ditafsirkan distribusi stasioner steady-state rantai markov merupakan rata-rata peluang state untuk jangka panjang dan karenanya waktu relatif digunakan dalam setiap state. Jika solusi steady-state ada, vektor π merupakan vektor peluang state dalam steady-state.

Solusi steady-state diperoleh dengan memisalkan $n \rightarrow \infty$, persamaan sebelumnya menjadi

$$\pi = \pi P \text{ atau } 0 = \pi(I - P)$$

Sistem persamaan linear diatas tidak memiliki solusi tunggal. Untuk mendapatkan solusi tunggal diberikan solusi :

$$\sum_{t=1}^{N} \pi_i = 1$$

Misalkan $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ vektor peluang state jika sistem setimbang, dalam hal ini solusi steady-state ada. Pada saat model steady-state maka turunan terhadap waktu sama dengan nol dan akan di dapat solusi sistem persamaan linear sederhana

$$0 = \pi P$$

(Katinka Wolter, (2004)

Matriks Singular dan Rank

Jika determinan matriks bujursangkar A berukuran n x n sama dengan nol, maka matriks tersebut disebut singular. Ini berarti paling tidak ada satu baris dan satu kolom yang tak bebas linear dengan yang lain. Jika baris dan kolom ini dihilangkan, maka akan di dapat matriks lain disebut A_{n-1}, disini kita dapat menghilangkan baris atau kolom dan dari sini didapat A_{n-1} dan begitu seterusnya. Ini akan membawa kita pada matriks r x r, rank r matriks A dapat ditulis dengan rank(A) = r.

Jika determinan A tidak nol maka matriks A disebut nonsingular. Rank matriks nonsingular n x n sama dengan n. dan tentunya determinan A^T sama dengan determinan A karena akan memenuhi untuk pertukaran baris dan kolom sesuai definisi.

Norm Vektor

Definisi : Jika V adalah ruang perkalian dalam, maka norm (atau panjang) dari sebuah vektor u dinyatakan oleh $\|u\|$ dan didefinisikan oleh :

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$$

Selanjutnya, jarak di antara dua titik (vektor) u dan v dinyatakan oleh $d(u,v)$ dan didefinisikan oleh :

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

(Howard Anton, 1985)

Norm vektor yang biasa digunakan dalam aljabar linear numerik adalah norm Holder, yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

(Youcef Saad, 1992)

Metode Reduksi Rank

Metode reduksi rank yang digunakan Bin Peng (2004) dibangun oleh dua teorema, yaitu Teorema Formulasi Reduksi Rank Satu Wedderburn dan Teorema Formula Shermann-Morrison. Dari dua teoerema ini akan diturunkan menjadi sebuah algoritma untuk mendapatkan distribusi stasioner dari rantai markov.

Teorema Formulasi Reduksi Rank Satu Wedderburn

Misalkan $A \in R^{nxn}$. Jika $x \in R^n$ dan $y \in R^n$ adalah vektor sedemikian sehingga $w = y^T Ax \neq 0$, maka matriks $B = A - w^{-1} Axy^T A$ memiliki rank paling tidak satu yang lebih kecil dari rank A .

Teorema Formula Shermann-Morrison

Jika $A \in R^{nxn}$ adalah non singular dan jika *u* dan *v* vektor kolom *n x 1* sehingga $1 + v^T Au \neq 0$ maka jumlah $A + uv^T$ adalah non singular dan

$$\left(A + uv^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}$$

Catat bahwa pada saat A merupakan matriks identitas I, kita punya

$$\left(I + uv^T\right)^{-1} = I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} \quad \text{jika } 1 + v^T u \neq 0$$

Sekarang, misalkan $A = M - N$ dan $T = M^{-1}N$ dan asumsikan *rank*(T) = *r* > 1. Misal e_i adalah kolom ke-*i* dari matriks identitas *n* x *n*. Diberikan dua vektor $e_{i_1}, e_{j_1} \in I^{n \times n}$ sehingga

$$w = e_{j_1}^T T e_{i_1} = T[j_1, i_1] \neq 0$$

dan

$$e_{j_1}^T T^2 e_{i_1} = T[j_1, *]T[*, i_1] \neq w$$

maka dengan formula reduksi rank-1 Wedderburn, matriks

$$T^{(2)} = T - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T$$

memiliki rank paling tidak lebih kecil satu dari rank T. Dari persamaan

$$x = Tx$$

kita punya

$$x = \left(T^{(2)} + w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T\right)x$$

atau

$$\left(I - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T\right)x = T^{(2)}x$$

Sehingga, jika $e_{j_1}^T T^2 e_{i_1} \neq w$ maka

$$x = \left(I - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T\right)^{-1} T^{(2)}x = \left(I - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T\right)^{-1}\left(T - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T\right)x = Hx$$

Dimana *rank*(H) = *rank*($T^{(2)}$) = *rank*(T) – 1 karena perkalian awal matriks $T^{(2)}$ oleh matriks nonsingular tidak mengubah rank. Dari formula Sherman-Morrison kita hitung Matriks H sebagai

$$H = \left(I + \frac{w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T}{1 - w^{-1}e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}}\right)\left(T - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T\right)$$

$$= T - w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T + \frac{w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T^2}{1 - w^{-1}e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}} - \frac{w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T}{1 - w^{-1}e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}}$$

Kalikan kedua sisi dengan skalar $w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right) \neq 0$, menghasilkan

$$w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right)H$$

$$= w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right)T - w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right)w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T + w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right)\frac{w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T^2}{1 - w^{-1}e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}}$$ Bagi

$$- w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right)\frac{w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T w^{-1}Te_{i_1}e_{j_1}^T T}{1 - w^{-1}e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}}$$

$$= w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right)T - wTe_{i_1}e_{j_1}^T T(T - I)$$

kedua ruas dengan skalar $w\left(w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}\right) \neq 0$ menghasilkan

$$H = T\frac{Te_{i_1}e_{j_1}^T T(T-I)}{w - e_{j_1}^T T^2 e_{i_1}}$$

Perlu dicatat bahwa matriks H diatas mempunyai rank paling tidak lebih kecil satu dari matriks T. Proses reduksi akan terus berulang sampai akhirnya menghasilkan matriks dengan rank 1.

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Penelilian ini bersifat kualitatif deskriptif, yaitu penelitian yang ditujukan untuk mengidentifikasi dan mendeskripsikan kebutuhan dalam rangka menganalisis dan memat sebuah sistem model antrian.

Metode Pengumplan Data

Penelitian ini menggnakan metode kepustakaan; yaitu mengkaji beberapa teori yang berkaitan dengan penentuan distribusi stationer jaringan siklis Jackson dengan metode Reduksi Rank.

Teknik Pemodelan

Metode kuadrat terkecil digunakan untuk penaksiran paramete model regresi linier,dismping menggunakan juga metode Bootstrap Nonparameter sebagai metode resampling data error secara acak dan independen dengan pengembalian.

Tahapan Penelitian

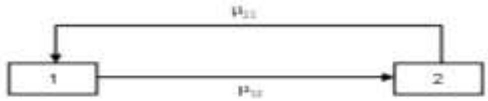
Penelitian ini merupakan penelitian untuk pemodelan suatu jaringan Siklis Jackson sebagai suatu bentuk Markov dan menentukan vektor peluang sationer model antrian dengan metode Reduksi Rank. Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Pengumpulan data lewat telaah pustakan
2. Analisis kebutuhan pemodelan, meliputi keutuhan output,kebutuhan input dan anaisis kebutan basis data.
3. Pemodelan sistem.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Jaringan siklik 2 stasiun

Dari definisi jaringan siklik sebelumnya, diketahui bahwa jumlah stasiun adalah 2 atau i = 2, maka gambaran umum mengenai jaringan siklik dengan 2 stasiun adalah sebagai berikut :



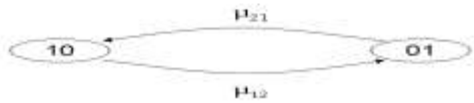
dengan : μ_{ij} = nilai transisi dari stasiun i ke j, dimana i, j = 1, 2

Dari gambar diatas dapat dibuat proses jaringan siklik untuk dua stasiun dengan sejumlah n pelanggan dimana state prosesnya adalah distribusi pelanggan di dalam stasiun.

Untuk 1 pelanggan, state-statenya didefinisikan sebagai :

$$X(t) = \begin{cases} 1,0 & \text{, jika 1 pelanggan di stasiun 1, 0 pelanggan di stasiun 2} \\ 0,1 & \text{, jika 0 pelanggan di stasiun 1, 1 pelanggan di stasiun 2} \end{cases}$$

Dari defnisi state di atas maka dapat dibuat model hubungan antar state, dimana pelanggan bergerak dari stasiun 1 ke stasiun 2 dan begitu pula sebaliknya.



Gambar 4. Model hubungan antar state 2 stasiun dengan 1 pelanggan

Dari model hubungan pada Gambar 4, maka dapat dibangun sebuah matriks yang menggambarkan hubungan antar state. Karena jaringan siklik merupakan Continuous Time Markov Chain (CTMC), maka dapat dibuat matriks pembangun Q dimana matriks ini memenuhi nilai transisi. Matriks pembangun Q merupakan kumpulan entri-entri nilai transisi dari state i ke state j (q_{ij}). Unsur diagonal pada matriks pembangun merupakan negatif dari penjumlahan unsur semua nilai yang meninggalkan state i, dimana dapat diintrepretasikan sebagai nilai untuk tetap tinggal di i. Sebagai konsekuensinya penjumlahan baris matriks pembangun selalu nol. Dengan kata lain, unsur q_{ij}, $i \neq$ j pada matriks Q merupakan nilai dari sistem yang bergerak dari state i ke state j. Untuk unsur diagonal yaitu q_{ii}, diberikan nilai $-\sum_{j\neq i} q_{ij}$. Atau dalam bentuk matriks yaitu :

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Maka matriks pembangun Q untuk jaringan siklik Jackson 2 stasiun dengan 1 pelanggan adalah :

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{10} & \mu_{10} \\ \mu_{01} & -\sum_{01} \end{pmatrix}$$

Karena nilai $-\sum_{10}$ dan $-\sum_{10}$ merupakan negatif dari penjumlahan baris matriks pembangun dan unsur baris selain diagonal matriks pembangun hanya satu maka nilai $-\sum_{10}$ dan $-\sum_{10}$ dapat ditentukan yaitu negatif dari μ_{10} dan μ_{01}, dengan kata lain :

$$-\sum_{10} = -\mu_{10} \quad \text{dan}$$
$$-\sum_{01} = -\mu_{01}$$

Dengan mengganti nilai $-\sum_{10}$ dan $-\sum_{10}$, matriks pembangun Q menjadi

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_{10} & \mu_{10} \\ \mu_{01} & -\mu_{01} \end{pmatrix}$$

Untuk 2 pelanggan, state-statenya didefinisikan sebagai :

$$X(t) = \begin{cases} 2{,}0 & \text{, jika 2 pelanggan di stasiun 1, 0 pelanggan di stasiun 2} \\ 1{,}1 & \text{, jika 1 pelanggan di stasiun 1, 1 pelanggan di stasiun 2} \\ 0{,}2 & \text{, jika 0 pelanggan di stasiun 1, 2 pelanggan di stasiun 2} \end{cases}$$

Dari definsi state di atas maka dapat dibuat model hubungan antar state, dimana pelanggan bergerak dari stasiun 1 ke stasiun 2 dan begitu pula sebaliknya.

Gambar 5. Model hubungan antar state 2 stasiun dengan 2 pelanggan

Dengan cara yang sama pada 1 pelanggan akan dibentuk matriks pembangun Q untuk jaringan siklik Jackson 2 stasiun dengan 2 pelanggan yaitu :

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{20} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & -\sum_{11} & \mu_{12} \\ 0 & \mu_{21} & -\sum_{02} \end{pmatrix}$$

Karena nilai $-\sum_{20}$ dan $-\sum_{02}$ merupakan negatif dari penjumlahan baris matriks pembangun dan unsur baris selain diagonal matriks pembangun hanya satu maka nilai $-\sum_{20}$ dan $-\sum_{02}$ dapat ditentukan yaitu negatif dari unsur μ_{12} dan μ_{21}, dengan kata lain:

$$-\sum_{20} = -\mu_{12} \quad \text{dan}$$
$$-\sum_{02} = -\mu_{21}$$

dan nilai $-\sum_{11}$ merupakan negatif dari jumlah μ_{12} dan μ_{21}, dengan kata lain :

$$-\sum_{11} = -(\mu_{12} + \mu_{21})$$

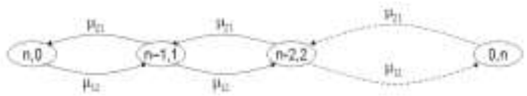
Dengan mengganti nilai $-\sum_{20}$, $-\sum_{11}$ dan $-\sum_{02}$, matriks pembangun Q menjadi

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_{12} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & -(\mu_{12} + \mu_{21}) & \mu_{12} \\ 0 & \mu_{21} & -\mu_{21} \end{pmatrix}$$

Dari jaringan siklik dengan 1 dan 2 pelanggan diatas kemudian dibuat untuk sejumlah n pelanggan, dimana state-statenya didefinisikan sebagai berikut :

$$X(t)=\begin{cases} n,0 & \text{, jika stasiun 1 dengan n pelanggan dan 0 di stasiun 2} \\ n-1,1 & \text{, jika stasiun 1 dengan n-1 pelanggan dan 1 di stasiun 2} \\ n-2,2 & \text{, jika stasiun 1 dengan n-2 pelanggan dan 2 di stasiun 2} \\ \ldots & \\ 0,n & \text{, jika stasiun 2 dengan 0 pelanggan dan n di stasiun 2} \end{cases}$$

Dari definsi state di atas maka dapat dibuat model hubungan antar state, dimana pelanggan bergerak dari stasiun 1 ke stasiun 2 dan begitu pula sebaliknya



Gambar 5. Model hubungan antar state 2 stasiun dengan 2 pelanggan

Maka dari model dengan *n* pelanggan diatas dapat dibuat tabel hubungan antar state jaringan siklik 2 stasiun dengan *n* pelanggan. Tabel ini digunakan untuk memudahkan kita melihat hubungan antar state yang telah terdefinisi. (Tabel 1)

Tabel 1. Hubungan antar state jaringan siklik 2 stasiun dengan *n* pelanggan

State	(n,0)	(n-1,1)	(n-2,2)	. . .	(1,n-1)	(0,n)
(n,0)	$-\Sigma_{n,0}$	μ_{12}	0		0	0
(n-1,1)	μ_{21}	$-\Sigma_{n-1,1}$	μ_{12}		0	0
(n-2,2)	0	μ_{21}	$-\Sigma_{n-2,2}$		0	0
. . .				. . .		
(1,n-1)	0	0	0	μ_{21}	$-\Sigma_{1,n-1}$	μ_{12}
(0,n)	0	0	0	0	μ_{21}	$-\Sigma_{0,n}$

Dari hubungan antar state jaringan siklik 2 stasiun dengan *n* pada Tabel 1, dapat dibentuk matriks pembangun *Q* yaitu :

$$Q=\begin{pmatrix} -\Sigma_{n,0} & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{21} & -\Sigma_{n-1,1} & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{21} & -\Sigma_{n-2,2} & \mu_{12} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_{21} & -\Sigma_{1,n-1} & \mu_{12} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{21} & -\Sigma_{0,n} \end{pmatrix}$$

Karna nilai $-\sum_{n0}$ dan $-\sum_{0n}$ merupakan negatif dari penjumlahan baris matriks pembangun dan unsur baris selain diagonal matriks pembangun hanya satu maka nilai $-\sum_{n0}$ dan $-\sum_{0n}$ dapat ditentukan yaitu negatif dari unsur μ_{12} dan μ_{21}, dengan kata lain:

$$-\sum_{n0}=-\mu_{12} \quad \text{dan}$$
$$-\sum_{0n}=-\mu_{21}$$

dannilai $-\Sigma_{n-1,1}, -\Sigma_{n-2,2}, -\Sigma_{n-3,3}, \ldots, -\Sigma_{1,n-1}$ merupakan negatif dari jumlah μ_{12} dan μ_{21}, dengan kata lain :

$$-\Sigma_{n-1,1}=-\Sigma_{n-2,2}=-\Sigma_{n-3,3}=\ldots=-\Sigma_{1,n-1}=-(\mu_{12}+\mu_{21})$$

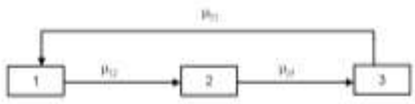
Dengan mengganti nilai $-\Sigma_{n-1,1}, -\Sigma_{n-2,2}, -\Sigma_{n-3,3}, \ldots, -\Sigma_{1,n-1}$, $-\Sigma_{n,0}$ dan $-\Sigma_{0,n}$, matriks pembangun *Q* menjadi

$$Q=\begin{pmatrix} -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{21} & -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{21} & -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_{21} & -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{21} & -\mu_{21} \end{pmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dilihat bahwa jumlah state, dalam hal ini jumlah baris dan kolom matriks pembangun *Q* pada jaringan siklik Jackson dengan dua stasiun akan berjumlah *n + 1*, dimana *n* merupakan jumlah pelanggan.

Jaringan siklik 3 stasiun

Dari definisi jaringan siklik sebelumnya, diketahui bahwa jumlah stasiun adalah 3 atau i = 3, maka gambaran umum mengenai jaringan siklik dengan 3 stasiun adalah sebagai berikut :



dengan : μ_{ij} = nilai rataan layanan dari stasiun i ke j. i,j = 1, 2, 3.

Dari gambar diatas dapat dibuat graf proses jaringan siklik untuk tiga stasiun dengan sejumlah n pelanggan dimana state prosesnya adalah distribusi pelanggan di dalam stasiun.

Untuk 1 pelanggan, dimana state-statenya didefinisikan sebagai berikut :

$$X(t) = \begin{cases} 1,0,0 & \text{, jika stasiun 1 dengan 1 pelanggan, 0 pelanggan di stasiun lain} \\ 0,1,0 & \text{, jika stasiun 2 dengan 1 pelanggan, 0 pelanggan di stasiun lain} \\ 1,0,0 & \text{, jika stasiun 1 dengan 1 pelanggan, 0 pelanggan di stasiun lain} \end{cases}$$

Dari definsi state di atas maka dapat dibuat model hubungan antar state, dimana pelanggan bergerak berurutan dari stasiun 1 ke stasiun 2, kemudian ke stasiun 3 lalu kembali ke stasiun 1 dan begitu seterusnya.

Dengan cara yang sama pada 2 stasiun akan dibentuk matriks pembangun Q untuk jaringan siklik Jackson 3 stasiun dengan 1 pelanggan yaitu :

$$Q = \begin{pmatrix} -\Sigma_{1,0,0} & \mu_{1,2} & 0 \\ 0 & -\Sigma_{0,1,0} & \mu_{2,3} \\ \mu_{3,1} & 0 & -\Sigma_{0,0,1} \end{pmatrix}$$

Karena nilai $-\Sigma_{1,0,0}$, $-\Sigma_{0,1,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,1}$ merupakan negatif dari penjumlahan baris matriks pembangun dan unsur baris selain diagonal matriks pembangun hanya satu maka nilai $-\Sigma_{1,0,0}$, $-\Sigma_{0,1,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,1}$ dapat ditentukan yaitu negatif dari unsur $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,3}$ dan $\mu_{3,1}$, dengan kata lain :

$-\Sigma_{1,0,0} = -\mu_{1,2}$, $-\Sigma_{0,1,0} = -\mu_{2,3}$ dan $-\Sigma_{0,0,1} = -\mu_{3,1}$

Dengan mengganti nilai $-\Sigma_{1,0,0}$, $-\Sigma_{0,1,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,1}$, matriks pembangun Q menjadi

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_{1,2} & \mu_{1,2} & 0 \\ 0 & -\mu_{2,3} & \mu_{2,3} \\ \mu_{3,1} & 0 & -\mu_{3,1} \end{pmatrix}$$

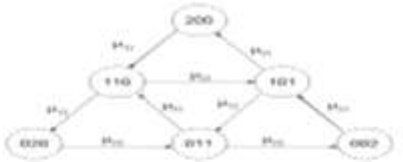
Untuk 2 pelanggan, state-statenya didefinisikan sebagai berikut :

$$X(t) = \begin{cases} 2,0,0 & \text{, jika stasiun 1 dengan 2 pelanggan, 0 pelanggan di stasiun lain} \\ 1,1,0 & \text{, jika stasiun 1 dengan 1 pelanggan, 1 di stasiun 2, 0 stasiun 3} \\ 0,2,0 & \text{, jika stasiun 2 dengan 2 pelanggan, 0 pelanggan di stasiun lain} \\ 1,0,1 & \text{, jika stasiun 1 dengan 1 pelanggan, 0 di stasiun 2, 1 di stasiun 3} \\ 0,1,1 & \text{, jika stasiun 0 dengan 1 pelanggan, 1 di stasiun 2, 1 di stasiun 3} \\ 0,0,2 & \text{, jika stasiun 3 dengan 2 pelanggan, 0 pelanggan di stasiun lain} \end{cases}$$

Dari definsi state di atas maka dapat dibuat model hubungan antar state, dimana pelanggan bergerak berurutan dari stasiun 1 ke stasiun 2, kemudian ke stasiun 3 lalu kembali ke stasiun 1 dan begitu seterusnya.

Dengan cara yang sama pada 2 stasiun akan dibentuk matriks pembangun Q untuk jaringan siklik Jackson 3 stasiun dengan 2 pelanggan yaitu :

$$Q = \begin{pmatrix} -\Sigma_{2,0,0} & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma_{1,1,0} & \mu_{12} & \mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_{0,2,0} & 0 & \mu_{23} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & 0 & -\Sigma_{1,0,1} & \mu_{12} & 0 \\ 0 & \mu_{31} & 0 & 0 & -\Sigma_{0,1,1} & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{31} & 0 & -\Sigma_{0,0,2} \end{pmatrix}$$



Karena nilai $-\Sigma_{2,0,0}$, $-\Sigma_{0,2,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,2}$ merupakan negatif dari penjumlahan baris matriks pembangun dan unsur baris selain diagonal matriks pembangun hanya satu maka nilai $-\Sigma_{2,0,0}$, $-\Sigma_{0,2,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,2}$ dapat ditentukan yaitu negatif dari unsur $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,3}$ dan $\mu_{3,1}$, dengan kata lain :

$$-\Sigma_{2,0,0} = -\mu_{12}, \quad -\Sigma_{0,2,0} = -\mu_{23} \quad \text{dan} \quad -\Sigma_{0,0,2} = -\mu_{31}$$

dan nilai $-\Sigma_{1,1,0}$, $-\Sigma_{1,0,1}$ dan $-\Sigma_{0,1,1}$ merupakan negatif dari jumlah $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,3}$ atau $\mu_{3,1}$ atau dengan kata lain :

$$-\Sigma_{1,1,0} = -(\mu_{12} + \mu_{23}),$$
$$-\Sigma_{1,0,1} = -(\mu_{12} + \mu_{31}) \quad \text{dan}$$
$$-\Sigma_{0,1,1} = -(\mu_{23} + \mu_{31})$$

Dengan mengganti nilai $-\Sigma_{2,0,0}$, $-\Sigma_{0,2,0}$, $-\Sigma_{0,0,2}$, $-\Sigma_{1,1,0}$, $-\Sigma_{1,0,1}$ dan $-\Sigma_{0,1,1}$ matriks pembangun Q menjadi

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_{12} & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu_{12}+\mu_{23}) & \mu_{12} & \mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_{23} & 0 & \mu_{23} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & 0 & -(\mu_{12}+\mu_{31}) & \mu_{12} & 0 \\ 0 & \mu_{31} & 0 & 0 & -(\mu_{23}+\mu_{31}) & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{31} & 0 & -\mu_{31} \end{pmatrix}$$

Dari jaringan siklik dengan 1 dan 2 pelanggan diatas kemudian model jaringan siklik untuk sejumlah *n* pelanggan, dimana state-statenya didefinisikan seperti pada lampiran 1. Dari state yang terdefinisi tersebut, dibuat model hubungan antar state, dimana pelanggan akan bergerak berurutan dari stasiun 1 ke stasiun 2, kemudian ke stasiun 3 lalu kembali ke stasiun 1 dan begitu seterusnya seperti dapat dilihat pada lampiran 2. Kemudian akan dibuat tabel hubungan antar state. Tabel 2 ini digunakan untuk memudahkan kita melihat hubungan antar state yang telah terdefinisi. Pada tabel 2 terdapat entri kosong. Ini berarti nilai transisinya nol (0), dengan kata lain tidak ada perpindahan dari satu state ke state yang lain. Dari Tabel 2, akan dibentuk matriks pembangun Q seperti dapat dilihat pada lampiran 2.

Dari matriks pembangun Q jaringan siklik 3 stasiun dengan n pelanggan maka diketahui bahwa nilai $-\Sigma_{n,0,0}$, $-\Sigma_{0,n,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,n}$ merupakan negatif dari penjumlahan baris matriks pembangun dan unsur baris selain diagonal matriks pembangun hanya satu maka nilai $-\Sigma_{n,0,0}$, $-\Sigma_{0,n,0}$ dan $-\Sigma_{0,0,n}$ dapat ditentukan yaitu negatif dari unsur $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,3}$ dan $\mu_{3,1}$, dengan kata lain :

$$-\Sigma_{n,0,0} = -\mu_{12}, \quad -\Sigma_{0,n,0} = -\mu_{23} \quad \text{dan} \quad -\Sigma_{0,0,n} = -\mu_{31}$$

Selanjutnya untuk nilai $-\Sigma_{n-1,1,0}$, $-\Sigma_{n-2,n,0}$, ..., $-\Sigma_{1,n-1,0}$, $-\Sigma_{n-1,0,1}$, $-\Sigma_{n-1,0,2}$, ..., $-\Sigma_{1,0,n-1}$, $-\Sigma_{0,n-1,1}$, $-\Sigma_{0,n-2,2}$, ..., $-\Sigma_{0,1-n,1}$ merupakan negatif dari penjumlahan unsur baris matriks pembangun $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,3}$ atau $\mu_{3,1}$ atau dengan kata lain :

$$-\Sigma_{n-1,1,0} = -\Sigma_{n-2,2,0} = \ldots = -\Sigma_{1,n-1,0} = -(\mu_{12} + \mu_{23})$$

$$-\Sigma_{n-1,0,1} = -\Sigma_{n-2,0,2} = \ldots = -\Sigma_{1,0,n-1} = -(\mu_{12} + \mu_{31})$$

$$-\Sigma_{0,n-1,1} = -\Sigma_{0,n-2,2} = \ldots = -\Sigma_{0,1-n,1} = -(\mu_{23} + \mu_{23})$$

Selanjutnya untuk nilai $-\Sigma_{n-2,1,1}$, $-\Sigma_{n-3,2,1}$, ..., $-\Sigma_{1,n-2,1}$, $-\Sigma_{n-3,1,2}$, ..., $-\Sigma_{1,n-3,2}$, ..., $-\Sigma_{1,1,n-2}$ merupakan negatif dari penjumlahan unsur baris matriks pembangun $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,3}$ dan $\mu_{3,1}$ atau dengan kata lain :

$$-\Sigma_{n-2,1,1} = -\Sigma_{n-3,2,1} = \ldots = -\Sigma_{1,n-2,1} = -\Sigma_{n-3,1,2} = -\Sigma_{1,n-3,2} = \ldots = -\Sigma_{1,1,n-2}$$
$$= -(\mu_{12} + \mu_{23} + \mu_{31})$$

Dengan mengganti unsur diagonalnya maka matriks pembangun Q akan menjadi matiks pada lampiran 3. Dari model atau matriks pembangun diatas dapat diketahui jumlah state dalam hal ini jumlah baris dan kolom matriks pembangun Q yaitu :

$$3 + \sum_{i=2}^{n-1} n + 1$$

dimana n merupakan jumlah pelanggan

Penentuan distribusi stasioner dengan Metode reduksi rank

Metode reduksi rank dalam penentuan distribusi stasioner jaringan siklik dapat dibagi menjadi tiga tahap proses, yaitu :

a. Membangun matiks pembangun rantai markov menjadi sebuah matriks kolom taknol dengan rank yang lebih kecil dari rank matriks pembangun.
b. Membentuk matriks kolom taknol menjadi sebuah matriks dengan rank satu dengan langkah berurutan seperti pada bab II.
c. Menormalisasi matriks dengan rank satu untuk mendapatkan distribusi stasioner.

Sebelum masuk ke tahap satu, akan diperlihatkan lebih dahulu lemma yang akan digunakan dalam penentuan distribusi stasioner.

Lemma : Untuk Tipe Markov, sistem $Ax = 0$ dengan pemisahan $A = M - N$, dimana M nonsingular dan $N \neq 0$, persamaan $x = Tx$, $T = M^{-1}N$ mempunyai solusi vektor π tunggal jika A rantai markov irreducible.

Bukti :

Asumsikan terdapat dua vektor solusi $\pi^{(1)}$ dan $\pi^{(2)}$ yang berbeda, sedemikian hingga $\pi_j^{(i)} > 0$, j = 1, 2, ..., n, i = 1, 2; $\sum_{j=1}^{n} \pi_j^{(i)}$, i = 1, 2 dan

$$\pi^{(1)} = T\pi^{(1)} \quad \text{dan} \quad \pi^{(2)} = T\pi^{(2)}$$

Atau

$$\pi^{(1)} = M^{-1}N\pi^{(1)} \quad \text{dan} \quad \pi^{(2)} = M^{-1}N\pi^{(2)}$$

Kalikan kedua sisi dengan matriks nonsingular M,

$$M\pi^{(1)} = N\pi^{(1)} \quad \text{dan} \quad M\pi^{(2)} = N\pi^{(2)}$$

Atau

$$(M - N)\pi^{(1)} = A\pi^{(1)} = 0 \quad \text{dan} \quad (M - N)\pi^{(2)} = A\pi^{(2)} = 0$$

dimana mengindikasikan bahwa sistem markov $Ax = 0$ memiliki dua vektor solusi, yang kontradiksi dengan irreducibilitas rantai markov A.

Dari lemma diatas diketahui, dengan pemisahan $A = M - N$ dan $T = M^{-1}N$ maka akan didapat matriks dengan nilai solusi sama dengan matriks pembangun. Perlu diingat bahwa tujuan dari metode ini adalah mendapatkan matriks dengan rank yang lebih kecil dari matriks pembangun.

Selanjutnya dari metode reduksi rank pada Bab II, akan disederhanakan perhitungan matriks H, maka diasumsikan kolom taknol pada N membentuk himpunan $S = \{k_1, k_2, ..., k_r\}$. asumsikan juga *rank(N)* = r, yang berarti semua kolom tak nol dari N bebas linear. Misalkan e_j adalah kolom ke-j matriks identitas $I^{n \times n}$. Dan

$$\beta = e_{j_1}^T T^2 e_{i_1} = T[j_1, *]T[*, i_1] \neq w$$
$$\beta_j = e_{j_1}^T T^2 e_j = T[j_1, *]T[*, j]$$
$$w_j = e_{j_1}^T T e_j = T[j_1, j]$$

Maka untuk matriks H pada persamaan sebelumnya, kita punya

$$\begin{aligned}(w - \beta)He_j &= (w - \beta)Te_j + Te_{i_1}e_{j_1}^T T^2 e_j - Te_{i_1}e_{j_1}^T Te_j \\ &= (w - \beta)Te_j + \beta_j Te_{i_1} - w_j Te_{i_1} \\ &= (w - \beta)Te_j + (\beta_j - w_j)Te_{i_1}\end{aligned}$$

Ini berarti

$$He_j = Te_j + \frac{(\beta_j - w_j)}{(w-\beta)} Te_{i_1} \quad ,$$

untuk $\forall j \in S$

atau

$$H[*, j] = T[*, j] + \frac{(\beta_j - w_j)}{(w-\beta)} T[*, j]$$

Maka matriks membangun kolom demi kolom dari iterasi matriks T sebelumnya. Dari langkah ini akan didapatkan matriks H dengan 1 kolom taknol. Dengan kata lain matriks H memiliki rank sama dengan 1.

Matriks ini kemudian dinormalisasi dengan menggunakan rumus :

$$\pi = \frac{H[*, j]}{\|H[*, j]\|_1}$$

dimana $\|H[*, j]\|_1$ merupakan norm-1 dari vektor $H[*, j]$. Dari normalisasi ini akan didapatkan distribusi stasioner dari jaringan siklik.

Urutan langkah mendapatkan distribusi stasioner, dapat dilihat dalam algoritma di bawah ini.

Input :

1. $A = M - N$: matriks tipe markov *A*, ukuran n x n, dengan pemisahan *M* – *N*
2. *r* : rank matriks *N*
3. S : himpunan himpunan semua kolom taknol matriks *N*

Output : distribusi stasioner π

1. H = $0^{r \times r}$; dari $T = M^{-1}N$
2. Jika *r* =1 ke 8
3. Do
   i. Pilih vektor e_{i_1} dan e_{j_1} sedemikian sehingga $w = T\lfloor j_1, i_1 \rfloor \neq 0$ dan $\beta = e_{j_1}^T T^2 e_{i_1} \neq w$
   ii. Hitung : $w_j = T\lfloor j_1, j \rfloor$ dan $\beta_j = T\lfloor j_1, * \rfloor T\lfloor *, j \rfloor$, $\forall j \in S - \{i_1\}$
   iii. Untuk $\forall j \in S - \{i_1\}$,
   $$H[*, j] = T[*, j] + \frac{(\beta_j - w_j)}{(w-\beta)} T[*, j]$$
4. Set $S = S - \{i_1\}$
5. Set *r* = *r* – 1
6. Set T = H
7. While *r* > 1
8. Normalisasi : pilih setiap $j \in S$ dan bentuk
   $$\pi = \frac{H[*, j]}{\|H[*, j]\|_1}$$

Contoh Penggunaan Metode Reduksi Rank

Selanjutnya akan perlihatkan contoh penentuan distribusi stasioner dengan metode reduksi rank. Contoh yang diambil merupakan contoh pada jurnal berjudul "*Approximation Algorithms for Steady-State Solutions of Markov Chains*" pada International Conference on Computer Systems and Technologies CompSysTech'2005 yang ditulis oleh Dimitar Radev dan kawan-kawan. Jaringan siklik Jackson yang diberikan merupakan jaringan siklik tiga stasiun dengan dua pelanggan. Nilai transisi dari stasiun 1 ke stasiun dua adalah 4, stasiun 2 ke stasiun 3 adalah 0,4 dan stasiun 3 ke stasiun 1 adalah 0,2. Dari pembahasan di atas diketahui bahwa jumlah state model jaringan adalah 6, berarti untuk matriks pembangun Q juga akan merupakan mariks dengan ukuran 6 x 6. Maka matriks pembangunnya adalah

$$Q = \begin{pmatrix} -\Sigma & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma & \mu_{12} & \mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{21} & -\Sigma & 0 & \mu_{23} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & 0 & -\Sigma & \mu_{12} & 0 \\ 0 & \mu_{31} & 0 & 0 & -\Sigma & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{31} & 0 & -\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.4 & 4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & -4.2 & 4 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Dengan pemisahan $Q^T = M - N$, maka matriks M dan N

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & -4.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}$$

dan

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks T adalah

$$T = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.045 & 0.045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.455 & 0.455 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.004 & 0.004 & 0.048 \\ 0 & 0 & 0 & 0.332 & 0.332 & 0.317 \\ 0 & 0 & 0 & 0.664 & 0.664 & 0.635 \end{pmatrix}$$

Pilih $e_{i_1} = e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ dan $e_{j_1} = e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Akan didapat

$$w = e_4^T T e_4 = 0.004 \neq 0$$

dan $\beta = e_1^T T^2 e_4 = 0.033 \neq w$

Selanjutnya akan ditentukan nilai β_j dan w_j, dengan $j \in \{5,6\}$, yaitu :

$\beta_5 = e_4^T T^2 e_5 = 0.033$ dan $w_5 = e_4^T T e_5 = 0.004$

$\beta_6 = e_4^T T^2 e_6 = 0.032$ dan $w_6 = e_4^T T e_6 = 0.048$

Dari nilai di atas akan diperoleh matriks H yang baru yaitu :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.050 & 0.028 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.501 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.001 \end{pmatrix}$$

Pilih $e_{i_1} = e_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ dan $e_{j_1} = e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Akan didapat

$$w = e_1^T T e_5 = -0.050 \neq 0$$

dan $\beta = e_1^T T^2 e_5 = 0 \neq w$

Selanjutnya akan ditentukan nilai β_j dan w_j, dengan $j \in \{6\}$, yaitu :

$\beta_6 = e_1^T T^2 e_6 = 0.003$ dan $w_6 = e_1^T T e_6 = 0.028$

Dari nilai di atas akan diperoleh matriks H yang baru yaitu :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.501 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.001 \end{pmatrix}$$

Dari matriks H diatas kemudian dinormalisasi dengan menggunakan

$$\pi = \frac{H[*, j]}{\|H[*, j]\|_1}$$

Dengan nilai $\|H[*, j]\|_1$ adalah 1.831. Maka didapat vektor distribusi stasioner:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.002 & 0.014 & 0.137 & 0.027 & 0.274 & 0.547 \end{pmatrix}$$

Namun untuk matriks dengan ukuran 2 x 2, dalam hal ini hanya mungkin terjadi pada jaringan siklik 2 stasiun dengan 1 pelanggan, metode reduksi rank tidak dapat digunakan karena dengan pemisahan $A = M - N$ dan $T = M^{-1}N$ dengan syarat *M* matriks nonsingulir dan *N* matriks taknol kemungkinan hanya akan menghasilkan matriks dengan ukuran 2 x 2 dengan rank sama dengan 1. Sehingga dapat langsung dinormalisasi untuk menghasilkan distribusi stasioner. Untuk melihat hal tersebut, dimisalkan μ_{12} = a dan μ_{21} = b. Maka matriks pembangunnya adalah :

$$Q = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$$

Dengan syarat *M* matriks nonsingulir dan *N* matriks taknol maka:

$$M = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$ dan $$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

Akan didapat matriks T

$$T = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

yang merupakan matriks dengan rank sama dengan 1. Dan apabila dinormalisasikan akan menghasilkan distribusi stasioner yaitu $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hasil ini berbeda dengan teori, yaitu :

$$\pi Q = 0$$

Dengan memasukkan matriks pembangun, maka

$$\pi \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix} = 0$$

Akan diperoleh

$$\pi_0 = \frac{b}{a}\pi_1$$

Karena $\sum_{t=1}^{N} \pi_i = 1$, maka didapatkan solusi

$$\pi_0 = \frac{b}{a+b}$$ dan

$$\pi_1 = \frac{a}{a+b}$$

Maka nilai distribusi stasionernya adalah $\pi = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

PENUTUP

Simpulan

Dari hasil pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Jaringan siklik Jackson dengan 2 stasiun dan 3 stasiun dapat dimodelkan kedalam bentuk markov. Hal ini dapat ditunjukkan dengan melihat matriks pembangun Q pada jaringan siklik Jackson yang merupakan representasi dari bentuk makrov. Matriks pembangun Q untuk 2 stasiun adalah:

$$Q = \begin{pmatrix} -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{21} & -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{21} & -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{21} & -(\mu_{12}+\mu_{21}) & \mu_{12} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{21} & -\mu_{21} \end{pmatrix}$$

2. Distribusi stasioner jaringan siklik dua stasiun bergantung pada nilai transisi dari stasiun 1 ke stasiun 2 dan nilai transisi dari stasiun 2 ke stasiun 1
3. Distribusi stasioner dari jaringan siklik dua stasiun dapat ditentukan dengan menggunakan bentuk umumnya, yaitu:

$$\pi = \left(\frac{\mu_{21}^{n}}{\mu_{12}^{n} + \mu_{12}^{n-1}\mu_{21} + \ldots + \mu_{12}\mu_{21}^{n-1} + \mu_{21}} \quad \frac{\mu_{12}\mu_{21}^{n-1}}{\mu_{12}^{n} + \mu_{12}^{n-1}\mu_{21} + \ldots + \mu_{12}\mu_{21}^{n-1} + \mu_{21}} \right.$$
$$\left. \cdots \frac{\mu_{12}\mu_{21}^{n-1}}{\mu_{12}^{n} + \mu_{12}^{n-1}\mu_{21} + \ldots + \mu_{12}\mu_{21}^{n-1} + \mu_{21}} \quad \frac{\mu_{12}^{n}}{\mu_{12}^{n} + \mu_{12}^{n-1}\mu_{21} + \ldots + \mu_{12}\mu_{21}^{n-1} + \mu_{21}} \right)$$

4. Metode reduksi rank dapat digunakan untuk menentukan distribusi stasioner dari jaringan siklik Jackson. Metode ini mereduksi rank matriks pembangun Q yang umumnya lebih besar dari satu, untuk kemudian menghasilkan matriks dengan rank sama dengan satu. Dari matriks tersebut maka dapat ditentukan stasioner dari jaringan siklik Jackson.

S a r a n

Dalam pembahasan ini hanya dibatasi pada 2 stasiun dan 3 stasiun jaringan siklik. Dalam kajian selanjutnya diharapkan untuk diperluas lagi menjadi stasiun yg lebih dari 3 stasiun dengan menggunakan teori graf dan melihat pengaruh pemilihan rank matriks T terhadap distribusi stasioner yang dihasilkan.

DAFTAR PUSTAKA

Bin Peng, 2004, Dissertation: Convergence, Rank Redukction and Bound for The Stationary Analysis of Markov Chains, North Carolina State University, North Carolina

Francois Baccelli, Serguei Foss dan Jean Mairesse, Stationary Ergodic Jackson Networks : Results and Counter Examples, NRIA Sophia Antipolis Novosibirsk State University and BRIMS Hewlett Packard Laboratories, Bristol

Howard Anton, 1985, Aljabar Linear Elementer, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Katinka Wolter, 2004, Skript : Modelling and Simulating of Communication System (Draft), Institut fur Informatik Fachgebiet Echtzeitsysteme und Kommunikation, Berlin

Norman Matloff, 2006, Introduction to Queuing Theory, University of California, California

Richard Serfozo, 2005, Notes on Markov Processes, Martingales, Brownian Motion and Stochastic Ordering, Springer, Berlin

Youcef Saad, 1992, Numerical Methods For Large Eigenvalue Problems, Manchester University Press, Manchester

) Penulis adalah STMIK Handayani Makassar
E-mail:movitadwi.ms@gmail.com